

УНИВЕРЗИТЕТ У ИСТОЧНОМ САРАЈЕВУ
ФАКУЛТЕТ ЗА ПРОИЗВОДЊУ И МЕНАЏМЕНТ ТРЕБИЊЕ
Предмет: Механика II (Кинематика)

ПРИМЈЕРИ РИЈЕШЕНИХ ЗАДАТАКА ЗА ПРВИ КОЛОКВИЈУМ

Требиње, децембар 2014. године

1. Кретање тачке M у равни је задато једначинама:

$$x = 4 \cdot t, \quad y = -16 \cdot t^2, \quad (x, y \text{ у } m, t \text{ у } s);$$

- скицирати линију путање тачке,
- наћи брзину и убрзање тачке у тренутку $t_1 = 0,5 \text{ s}$,
- одредити тангенцијално и нормално убрзање, као и полупречник кривине путање тачке у тренутку t_1 .

Рјешење:

а) Елиминацијом параметра t из задатих једначина кретања добија се једначина линије путање:

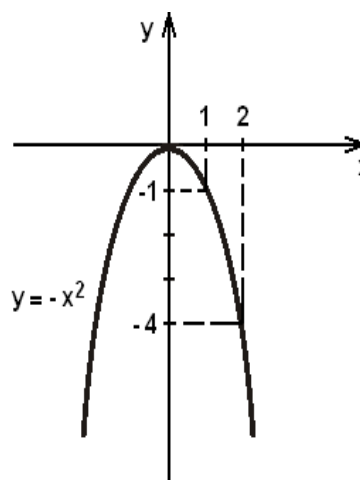
$$x = 4 \cdot t \Rightarrow t = \frac{x}{4},$$

$$y = -16 \cdot t^2,$$

$$y = -16 \cdot \left(\frac{x}{4}\right)^2,$$

$$y = -16 \cdot \frac{x^2}{16},$$

$$y = -x^2.$$



б) Брзина и убрзање тачке у функцији времена се добијају на основу првог и другог извода вектора положаја тачке по времену:

$$\vec{r} = 4t \cdot \vec{i} + (-16 \cdot t^2) \cdot \vec{j},$$

$$\vec{v} = 4 \cdot \vec{i} + (-32 \cdot t) \cdot \vec{j},$$

$$\vec{a} = 0 \cdot \vec{i} + (-32) \cdot \vec{j}.$$

Брзина и убрзање тачке у тренутку $t_1 = 0,5 \text{ s}$ се добијају уврштавањем ове вриједности у горње једначине:

$$\vec{v}_1 = 4 \cdot \vec{i} + (-16) \cdot \vec{j},$$

$$\vec{a}_1 = (-32) \cdot \vec{j}.$$

Интензитети брзине и убрзања у тренутку t_1 износе:

$$v_1 = \sqrt{v_{1x}^2 + v_{1y}^2} = \sqrt{4^2 + (-16)^2} = 16,5 \text{ m/s},$$

$$a_1 = \sqrt{a_{1x}^2 + a_{1y}^2} = \sqrt{0^2 + (-32)^2} = 32 \text{ m/s}^2.$$

в) Тангенцијално и нормално убрзање тачке у тренутку t_1 износе:

$$a = \sqrt{a_x^2 + a_y^2} = \sqrt{0^2 + 32^2} = 32 \text{ m/s}^2,$$

$$a^2 = a_T^2 + a_N^2,$$

$$a_T = \frac{dv}{dt},$$

$$v = \sqrt{v_x^2 + v_y^2} = \sqrt{4^2 + (-32 \cdot t)^2} = \sqrt{16 + 1024 \cdot t^2},$$

$$a_T = \frac{d\sqrt{16 + 1024 \cdot t^2}}{dt} = \frac{2048 \cdot t}{2 \cdot \sqrt{16 + 1024 \cdot t^2}} = \frac{256 \cdot t}{\sqrt{1 + 64 \cdot t^2}},$$

$$a_{1T} = \frac{256 \cdot \frac{1}{2}}{\sqrt{1 + 64 \cdot \left(\frac{1}{2}\right)^2}} = 31,05 \text{ m/s}^2,$$

$$a_{1N}^2 = a^2 - a_{1T}^2,$$

$$a_{1N} = \sqrt{a^2 - a_{1T}^2} = \sqrt{32^2 - 31,05^2} = 7,74 \text{ m/s}^2.$$

Полупречник кривине путање тачке у тренутку t_1 износи:

$$R_{k_1} = \frac{v_1^2}{a_{1N}} = \frac{16,5^2}{7,74} = 35,17 \text{ m}.$$

2. Кретање тачке M у равни је задато једначинама:

$$x = \cos t, \quad y = 2 \cdot \sin t, \quad (x, y \text{ у } m, t \text{ у } s);$$

- а) скицирати путању тачке и одредити положај тачке у тренутку $t_1 = \pi/2 \text{ s}$,
- б) наћи брзину и убрзање тачке у тренутку t_1 ,
- в) одредити тангенцијално убрзање, нормално убрзање и полупречник кривине путање тачке у тренутку t_1 .

Рјешење:

а) Елиминацијом параметра t из задатих једначина кретања добија се једначина линије путање:

$$x = \cos t$$

$$\underline{y = 2 \cdot \sin t}$$

$$x = \cos t / 2$$

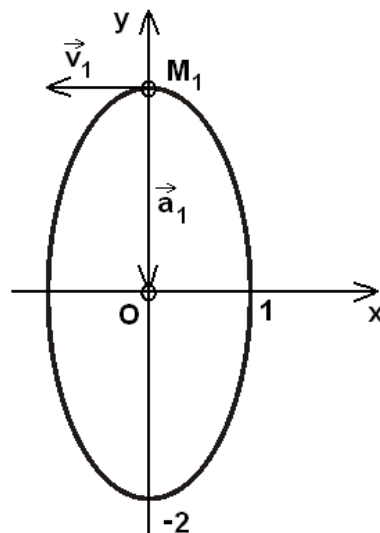
$$\underline{\frac{y}{2} = \sin t / 2}$$

$$\left. \begin{array}{l} x^2 = \cos^2 t \\ \left(\frac{y}{2}\right)^2 = \sin^2 t \end{array} \right\} +$$

$$x^2 + \left(\frac{y}{2}\right)^2 = \cos^2 t + \sin^2 t,$$

$$x^2 + \left(\frac{y}{2}\right)^2 = 1,$$

$$t \in (0, +\infty): x \in (-1, 1), y \in (-2, 2).$$



Положај тачке у тренутку $t_1 = \pi/2 \text{ s}$: $x_1 = 0, y_1 = 2$.

б) Брзина и убрзање тачке у функцији времена се добијају на основу првог и другог извода вектора положаја тачке по времену:

$$\vec{r} = \cos t \cdot \vec{i} + 2 \cdot \sin t \cdot \vec{j},$$

$$\vec{v} = -\sin t \cdot \vec{i} + 2 \cdot \cos t \cdot \vec{j},$$

$$\vec{a} = -\cos t \cdot \vec{i} + (-2 \cdot \sin t) \cdot \vec{j}.$$

Брзина и убрзање тачке у тренутку $t_1 = \pi/2$ s се добијају уврштавањем ове вриједности у горње једначине:

$$\vec{v}_1 = -\sin\frac{\pi}{2} \cdot \vec{i} + 2 \cdot \cos\frac{\pi}{2} \cdot \vec{j} = -\vec{i},$$

$$\vec{a}_1 = -\cos\frac{\pi}{2} \cdot \vec{i} + \left(-2 \cdot \sin\frac{\pi}{2}\right) \cdot \vec{j} = -2 \cdot \vec{j}.$$

Интензитети брзине и убрзања у тренутку t_1 износе:

$$v_1 = \sqrt{v_{1x}^2 + v_{1y}^2} = \sqrt{(-1)^2 + 0^2} = 1 \text{ m/s},$$

$$a_1 = \sqrt{a_{1x}^2 + a_{1y}^2} = \sqrt{0^2 + (-2)^2} = 2 \text{ m/s}^2.$$

в) Тангенцијално и нормално убрзање тачке у тренутку t_1 износе:

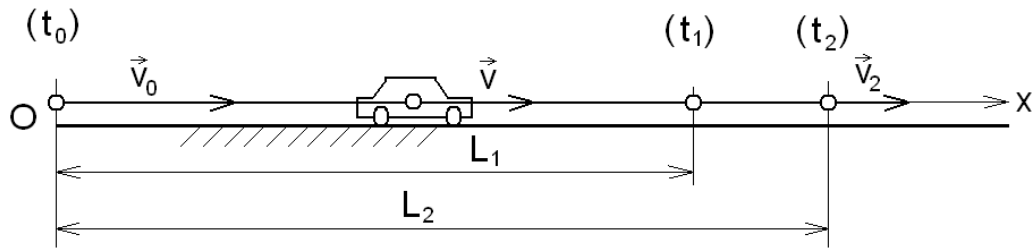
$$a_{1T} = \vec{a}_1 \cdot \vec{T} = 0 \text{ m/s}^2,$$

$$a_{1N} = \vec{a}_1 \cdot \vec{N} = 2 \text{ m/s}^2.$$

Полупречник кривине путање тачке у тренутку t_1 износи:

$$R_{k_1} = \frac{v_1^2}{a_{1N}} = \frac{1^2}{2} = 0,5 \text{ m}.$$

3. У току кочења са константним успорењем од $a = -2 \text{ m/s}^2$, које траје 10 s, аутомобил пређе пут дужине $L_2 = 100 \text{ m}$. Одредити брзине аутомобила на почетку и на крају кочења, као и пут који он пређе за првих 6 s од почетка кочења.



Рјешење:

Аутомобил изводи праволинијско равномерно промјенљиво кретање, па важе релације:

$$v = v_0 + a \cdot t,$$

$$x = x_0 + v_0 \cdot t + a \cdot \frac{t^2}{2}.$$

Брзина аутомобила на почетку кочења на основу предходне релације је:

$$x_2 = x_0 + v_0 \cdot t_2 + a \cdot \frac{t_2^2}{2},$$

$$x_0 = 0,$$

$$L_2 = v_0 \cdot t_2 + a \cdot \frac{t_2^2}{2},$$

$$L_2 = 100 \text{ m},$$

$$100 = v_0 \cdot 10 - 2 \cdot \frac{10^2}{2},$$

$$v_0 = 20 \text{ m/s}.$$

Брзина аутомобила на крају кочења износи:

$$v_2 = v_0 + a \cdot t_2 = 20 - 2 \cdot 10 = 10 \text{ m/s}.$$

Пређени пут за првих 6 s од почетка кочења износи:

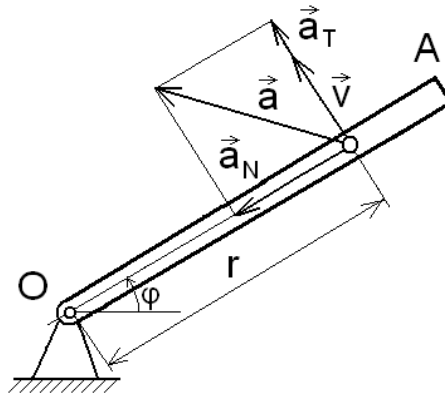
$$L_1 = v_0 \cdot t_1 + a \cdot \frac{t_1^2}{2} = 20 \cdot 6 - 2 \cdot \frac{6^2}{2} = 84 \text{ m}.$$

4. Штап OA обрће се у хоризонталној равни око вертикалне осе O по закону:

$$\varphi = \frac{9}{32} \cdot t^3 \quad (\varphi \text{ у } rad, t \text{ у } s).$$

Одредити:

- угаону брзину и угаоно убрзање штапа у тренутку $t_1 = 4/3$ s,
- брзину и убрзање тачке која се налази на растојању $r = 0,8$ m од обртне осе у тренутку t_1 .



Рјешење:

а) Угаона брзина и угаоно убрзање штапа се одређују на основу релација:

$$\omega = \dot{\varphi} = \frac{27}{32} \cdot t^2, \quad \varepsilon = \dot{\omega} = \frac{27}{16} \cdot t.$$

Угаона брзина штапа у тренутку $t_1 = 4/3$ s износи:

$$\omega_1 = \frac{27}{32} \cdot t_1^2 = \frac{27}{32} \cdot \left(\frac{4}{3}\right)^2 = 1,5 \text{ rad/s}.$$

Угаоно убрзање штапа у тренутку $t_1 = 4/3$ s износи:

$$\varepsilon_1 = \frac{27}{16} \cdot t_1 = \frac{27}{16} \cdot \frac{4}{3} = 2,25 \text{ rad/s}^2.$$

б) Брзина тачке која се налази на растојању $r = 0,8$ m у тренутку t_1 износи:

$$v_1 = r \cdot \omega_1 = 0,8 \cdot 1,5 = 1,2 \text{ m/s}.$$

Убрзање тачке која се налази на растојању $r = 0,8$ m у тренутку t_1 износи:

$$a_1 = \sqrt{a_{1T}^2 + a_{1N}^2},$$

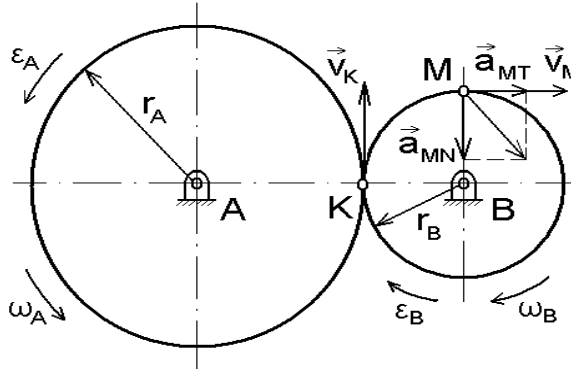
$$a_{1T} = r \cdot \varepsilon_1 = 0,8 \cdot 2,25 = 1,8 \text{ m/s}^2,$$

$$a_{1N} = r \cdot \omega_1^2 = 0,8 \cdot 1,5^2 = 1,8 \text{ m/s}^2,$$

$$a_1 = \sqrt{1,8^2 + 1,8^2} = 2,55 \text{ m/s}^2.$$

5. Зупчаник A , полупречника $r_A = 50 \text{ cm}$, полази из мира и обрће се константним угаоним убрзањем $\varepsilon_A = 2 \text{ rad/s}^2$ доводећи у кретање зупчаник B , полупречника $r_B = 20 \text{ cm}$. Одредити:

- угаоне брзине зупчаника A и B након 2s од почетка кретања,
- угаоно убрзање зупчаника B ,
- брзину и убрзање тачке M на ободу зупчаника B након 2s од почетка кретања.



Рјешење:

а) Зупчаник A изводи равномерно убрзано обртање, па важи релација:

$$\begin{aligned}\omega_A(t) &= \omega_{0A} + \varepsilon_A \cdot t, \\ \omega_{0A} &= 0, \\ \omega_A(t) &= 2 \cdot t.\end{aligned}$$

Угаона брзина зупчаника A у тренутку $t_1 = 2 \text{ s}$: $\omega_{1A} = 2 \cdot t_1 = 2 \cdot 2 = 4 \text{ rad/s}$.

Угаона брзина зупчаника B у тренутку t_1 одређује се из услова да су брзине додирних тачака K једнаке:

$$\begin{aligned}v_{1K} &= r_A \cdot \omega_{1A} = r_B \cdot |\omega_{1B}|, \\ |\omega_{1B}| &= \frac{r_A \cdot \omega_{1A}}{r_B} = \frac{0,5 \cdot 4}{0,2} = 10 \text{ rad/s}, \\ \omega_{1B} &= -10 \text{ rad/s}.\end{aligned}$$

б) Угаоно убрзање зупчаника B одређује се из услова да су тангенцијална убрзања додирних тачака K једнака:

$$\begin{aligned}a_{KT} &= r_A \cdot \varepsilon_A = r_B \cdot |\varepsilon_B|, \\ |\varepsilon_B| &= \frac{r_A \cdot \varepsilon_A}{r_B} = \frac{0,5 \cdot 2}{0,2} = 5 \text{ rad/s}^2, \\ \varepsilon_B &= -5 \text{ rad/s}^2.\end{aligned}$$

в) Брзина тачке M у тренутку t_1 износи:

$$v_{1M} = r_B \cdot |\omega_{1B}| = 0,2 \cdot 10 = 2 \text{ m/s}.$$

Убрзање тачке M у тренутку t_1 износи:

$$a_{1M} = \sqrt{a_{MT}^2 + a_{1MN}^2},$$

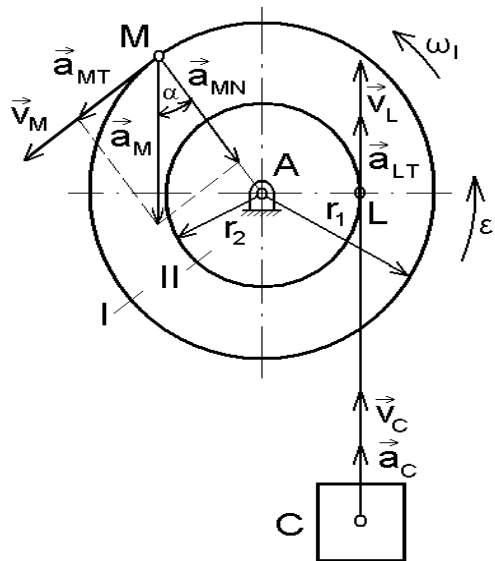
$$a_{MT} = r_B \cdot |\varepsilon_B| = 0,2 \cdot 5 = 1 \text{ m/s}^2,$$

$$a_{1MN} = r_B \cdot \omega_{1B}^2 = 0,2 \cdot (-10)^2 = 20 \text{ m/s}^2,$$

$$a_{1M} = \sqrt{1^2 + 20^2} = 20,03 \text{ m/s}^2.$$

6. На добош II, полупречника $r_2 = 20 \text{ cm}$, који се скупа са тачком I, полупречника $r_1 = 40 \text{ cm}$, обрће око хоризонталне осе кроз тачку A је намотано гипко нерастегљиво уже за чији је крај објешен терет C. Ако почетна угаона брзина тачка I износи 1 rad/s у смјеру супротном од обртања казаљке на сату и ако се он обрће са константним угаоним убрзањем од 2 rad/s^2 , одредити:

- угаону брзину тачка I и брзину и убрзање терта C након 3 s од почетка кретања,
- брзину и убрзање тачке M на ободу тачка I након 3 s од почетка кретања,
- угао који вектор убрзања тачке M заклапа са правцем AM након 3 s од почетка кретања.



Рјешење:

а) Тачак I изводи равномерно убрзано обртање, па важи релација:

$$\begin{aligned} \omega_I &= \omega_{0I} + \varepsilon_I \cdot t, \\ \omega_{0I} &= 1 \text{ rad/s}, \quad \varepsilon_I = 2 \text{ rad/s}^2, \\ \omega_I &= 1 + 2 \cdot t. \end{aligned}$$

Угаона брзина тачка I у тренутку $t_1 = 3 \text{ s}$: $\omega_{1I} = 1 + 2 \cdot t_1 = 1 + 2 \cdot 3 = 7 \text{ rad/s}$.

Брзина терета C у тренутку t_1 једнака је брзини тачке L у тренутку t_1 :

$$\begin{aligned} v_{1C} &= v_{1L}, \\ v_{1L} &= r_2 \cdot \omega_{1II}, \\ \omega_{1II} &= \omega_{1I} = 7 \text{ rad/s}, \\ v_{1L} &= 0,2 \cdot 7 = 1,4 \text{ m/s}, \\ v_{1C} &= 1,4 \text{ m/s}. \end{aligned}$$

Убрзање тачке C у тренутку t_1 једнако је тангенцијалном убрзању тачке L у тренутку t_1 :

$$a_{1C} = a_{1LT},$$

$$a_{1LT} = a_{LT} = r_2 \cdot \varepsilon_{II},$$

$$\varepsilon_{II} = \varepsilon_I = 2 \text{ rad/s}^2,$$

$$a_{1LT} = 0,2 \cdot 2 = 0,4 \text{ m/s}^2,$$

$$a_{1C} = 0,4 \text{ m/s}^2.$$

б) Брзина тачке M у тренутку t_1 износи:

$$v_{1M} = r_1 \cdot \omega_{I1} = 0,4 \cdot 7 = 2,8 \text{ m/s}.$$

Убрзање тачке M у тренутку t_1 износи:

$$a_{1M} = \sqrt{a_{MT}^2 + a_{1MN}^2},$$

$$a_{MT} = r_1 \cdot \varepsilon_I = 0,4 \cdot 2 = 0,8 \text{ m/s}^2,$$

$$a_{1MN} = r_1 \cdot \omega_{I1}^2 = 0,4 \cdot 7^2 = 19,6 \text{ m/s}^2,$$

$$a_{1M} = \sqrt{0,8^2 + 19,6^2} = 19,62 \text{ m/s}^2.$$

в) Угао који вектор убрзања тачке M у тренутку t_1 заклапа са правцем AM је:

$$\alpha_1 = \text{arc tg} \frac{a_{MT}}{a_{1MN}} = \text{arc tg} \frac{0,8}{19,62} = \text{arc tg} 0,04.$$